Приложение
к рабочей программе
учебной дисциплины

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для реализации программы дисциплины

ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика

для специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование

Базовая подготовка

2023

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ по дисциплине ЕН.03«Теория вероятностей и математическая статистика» составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников СПО по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» и на основе рабочей программы дисциплины. Данная дисциплина относится к блоку *естественнонаучных* дисциплин, устанавливающих базовые знания для освоения специальных и общепрофессиональных дисциплин.

Практическое занятие - это форма организации учебного процесса, предполагающая выполнение обучающимися по заданию и под руководством преподавателя одной или нескольких практических работ.

Дидактическая цель практических занятий - формирование у обучающихся практических умений, необходимых для изучения специальных учебных дисциплин, а также подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности.

В ходе практических занятий обучающиеся овладевают умениями пользоваться информационными источниками, работать с нормативными документами и инструктивными материалами, справочниками, выполнять чертежи, схемы, таблицы, решать разного рода задачи, делать вычисления.

Задачи, которые решаются в ходе практических занятий по математической статистике:

1) расширение и закрепление теоретических знаний по теории вероятностей и математической статистике, полученных в ходе лекционных занятий;

2) формирование у обучающихся практических умений и навыков, необходимых для качественной обработки статистической информации;

3) развитие у обучающихся потребности в самообразовании и совершенствовании знаний и умений в процессе изучения математической статистики и теории вероятностей;

4) формирование творческого отношения и исследовательского подхода в процессе изучения дисциплины;

5) формирование профессионально-значимых качеств будущего специалиста и навыков приложения полученных знаний в профессиональной сфере.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Тема 1. **Элементы комбинаторики**

Практическое занятие №1 *«Подсчет числа комбинаций»*

Тема 2. **Основы теории вероятностей**

Практическое занятие №2 *«Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики»*

Практическое занятие №3 *«Решение задач по теме «Теоремы сложения и умножения вероятностей»*

Практическое занятие №4 *«Решение задач на формулу Бернулли»*

Практическое занятие №5 *«Применение формул Лапласа»*

Тема 3. **Дискретные случайные величины (ДСВ)**

Практическое занятие №6 *«Построение закона распределения и функции распределения ДСВ»*

Практическое занятие №7 «*Вычисление основных числовых характеристик ДСВ»*

Тема 4. **Непрерывные случайные величины (НСВ)**

Практическое занятие №8 *«Построение закона распределения и функции распределения НСВ»*

Практическое занятие №9 *«Вычисление основных числовых характеристик НСВ»*

Практическое занятие №10 *«Законы распределения НСВ»*

Тема 5. **Математическая статистика**

Практическое занятие №11 *«Построение статистического дискретного ряда распределения»* ***Практическое занятие №12*** *«Построение эмпирической функции распределения»* ***Практическое занятие №13*** *«Вычисление выборочных характеристик распределения»* ***Практическое занятие №14*** *«Вычисление коэффициента корреляции»*

Практическое занятие №15 *«Обработка статистической информации в MSExcel»*

Требования к оформлению практических работ

Студент должен выполнить практическую работу в соответствии с полученным заданием. Каждый студент после выполнения работы должен представить отчет о проделанной работе с анализом полученных результатов и выводом по работе.

Отчет о проделанной работе следует выполнять на отдельных листах в клетку формата А4, которые хранятся в отдельных папках. Содержание отчета указано в описании практической работы.

Если студент не выполнил практическую работу или часть работы, то он может выполнить работу или оставшуюся часть во внеурочное время, согласованное с преподавателем.

Оценку по практической работе студент получает, с учетом срока выполнения работы, если:

– работа выполнена правильно и в полном объеме;

– сделан анализ проделанной работы и вывод по результатамработы;
– студент может пояснить выполнение любого этапаработы;
– отчет выполнен в соответствии с требованиями к выполнениюработы.

Зачет по практическим работам студент получает при условии выполнения всех предусмотренных программой работ, после сдачи отчетов по работам при получении удовлетворительных отметок.

Критерии оценки

Ответ оценивается отметкой «5», если:

работа выполнена полностью;

в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможны некоторые неточности, описки, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущены одна ошибка, или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

допущено не более двух ошибок или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

Практическое занятие №1

Тема: *«Подсчет числа комбинаций»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Элементы комбинаторики».

Краткие теоретические сведения

Комбинаторика - раздел математики, в котором изучаются простейшие «соединения». Перестановки - соединения, которые можно составить из n предметов, меняя всеми возможными способами их порядок; число их Размещения - соединения, содержащие по m предметов из числа n данных, различающиеся либо порядком предметов, либо самими предметами; число их Сочетания - соединения, содержащие по m предметов из n, различающиеся друг от друга, по крайней мере, одним предметом

Решить комбинаторную задачу - это значит выписать все возможные комбинации, составленные из чисел, слов, предметов и др., отвечающих условию задачи.

Размещениями из **n** элементов по **m** элементов (m < n) называются комбинации, составленные из данных **n** элементов по **m** элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число размещений без повторений из **n** по **m** (n различных элементов) вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Размещениями с повторениями из **n** элементов по **m** называются упорядоченные **m**-элементные выборки, в которых элементы могут **повторяться**.

Число размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m$$

Перестановки

Перестановками из **n** элементов называются размещения из этих n элементов по **n** (Перестановки - частный случай размещений).

Число перестановок без повторений (n различных элементов) вычисляется по формуле:

$$P_n = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$$

Число перестановок с повторениями (k различных элементов, где элементы могут повторяться m_1, m_2, …, m_k раз и $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, где n - общее количество элементов) вычисляется по формуле:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots\cdot m_k!}.$$

Правило суммы.

Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b – n способами, причем любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b, то выбор “a или b” можно сделать m + n способами.

Правило произведения.

Если из некоторого множества A элемент a_i можно выбрать K_A способами, а элемент b_j из множества B – K_B способами, то совокупность (a_i ;b_j) можно образовать K_A* K_B способами. Правило верно и для совокупностей, состоящих из большего, чем два числа элементов.

Перестановки с повторением.

Иногда требуется переставлять предметы, некоторые из которых неотличимы друг от друга. Рассмотрим такой вариант перестановок, который называется перестановками с повторениями. Пусть имеется n_1предметов 1-го типа, n_2 предмета 2-го, n_kпредметов k -го типа и при этом $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Количество разных перестановок предметов

$$P(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k) = \frac{n!}{(n_1! n_2! n_3! \ldots n_k!)}$$

Размещения с повторениями.

Пусть даны элементы a_1 ,a_2 , . . . ,a_n (а)

Размещением с повторениями из n элементов по k элементов называется всякая упорядоченная последовательность из k элементов, членами которой являются данные элементы. В размещении с повторениями один и тот же элемент может находиться на нескольких различных местах.

Формула для числа размещений с повторениями.

Каждый элемент может быть выбран n способами, поэтому :

$\overline{A}_n^k = n^k$,где $\overline{A}_n^k$ -обозначение размещений с повторениями .

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.

2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий:

1. Сколько существует двузначных чисел, которые записываются различными цифрами?
2. Сколькими способами из отряда в 20 человек можно выбрать командира и знаменосца?
3. Сколькими различными способами можно построить в шеренгу 5 человек?
4. Сколько различных двузначных чисел можно записать, используя цифры 3,4, 5 и 6? Сколько различных двузначных чисел можно записать, используя при записи числа каждую из указанных цифр только один раз? Запишите эти числа.
5. Сколько трехзначных чисел можно составить из трех различных, не равных нулю цифр? Зависит ли результат от того, какие цифры взяты? Укажите какой-нибудь способ перебора трехзначных чисел, при котором ни одно число не может быть пропущено.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы

2.Цель работы

3.Задание

4.Формулы расчета

5.Результат

Практическое занятие №2

Тема: *«Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основы теории вероятностей».

Краткие теоретические сведения

Классическое определение вероятности

Пример 1. Пусть в урне содержится ***6*** одинаковых шаров, причем ***2*** из них - красные, ***3*** - синие и ***1*** - белый. Какова возможность вынуть наудачу из урны цветной шар? Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называется вероятностью события ***А*** (появления цветного шара). Таким образом, ***вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события***.

Каждый из возможных результатов испытания (в примере 4, испытание состоит в извлечении шара из урны) называется ***элементарным исходом***.

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, называются ***благоприятствующими*** этому событию. В примере 4 благоприятствуют событию ***A*** (появление цветного шара) 5 исходов.

События называются ***равновозможными***, если есть основания считать, что не одно из них не является более возможным, чем другое.

<u>*Пример 2*</u>. Появление того или иного числа очков на брошенном игральном кубике – равновозможные события.

Вероятностью P(A) события ***A*** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. ***Вероятность P(A)*** события ***A*** определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где ***m*** – число элементарных исходов, благоприятствующих ***A***; ***n*** – число всех возможных элементарных исходов испытания.

В примере 4 всего элементарных исходов ***6***; из них ***5*** благоприятствуют событию ***A***. Следовательно, вероятность того что взятый шар окажется цветным, равна ***P(A) = 5/6***.

<u>*Пример 3*</u>. Вычислить вероятность выпадения в сумме ***10*** очков при бросании пары костей.

Решение. Рассмотрим все равновозможные исходы в результате бросания двух костей (их число равно ***36*** - рекомендуем записать в виде таблицы). Выпадение в сумме ***10*** очков (событие ***A***) возможно в трёх случаях ***– 4*** очка на первой кости и ***6*** на второй, ***5*** очков на первой и ***5*** на второй, ***6*** очков на первой и ***4*** на второй. Поэтому вероятность события А (выпадения в сумме ***10*** очков) равна $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

<u>*Пример 4.*</u> Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

Решение.

1) Обозначим событие А - «Вытянутый студентом билет состоит из подготовленных им билетов». Для вычисления вероятности появления данного события воспользуемся классическим определением вероятности события, согласно которому вероятность определяется

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

по формуле:

где *m* – число исходов, при которых появляется событие А,
n – общее число элементарных несовместных равновозможных исходов.

2) Определим *n*. Общее число билетов определяется сочетанием по 2 из 60:

$$n = C^2_{60} = \frac{60!}{58! \cdot 2!} = \frac{60 \cdot 59}{2} = 1770$$

3) Количество билетов, вопросы которых студент знает, определяется сочетанием по 2 из 50:

$$m = C^2_{50} = \frac{50!}{48! \cdot 2!} = \frac{50 \cdot 49}{2} = 1225$$

4) Определим вероятность события А:

$$P(A) = \frac{1225}{1770} = 0,69.$$

Ответ: Вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов равна Р(А) = 0,69. То есть, если будет, например, 100 таких студентов, то 69 из них вытянут билеты, к вопросам которых они подготовлены.

Свойство 1. Вероятность ***достоверного*** события ***А*** равна единице: ***Р(А) = 1***.

Свойство 2. Вероятность ***невозможного*** события ***А*** равна нулю: ***Р(А) = 0***.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между ***нулем*** и ***единицей***: $0 < P(A) < 1$

<u>Пример 5</u>. Так как вероятность выпадения ***13*** очков при бросании пары костей – невозможное событие, его вероятность равна ***нулю***.

Статистическое определение вероятности

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.

Относительной частотой события ***А*** называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где ***m*** – число появлений события ***А***, ***n*** – общее число испытаний.

Классическая вероятность вычисляется до опыта, а относительная частота – после опыта.

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний велико, то ***относительная частота обнаруживает свойство устойчивости***. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Это постоянное число и есть вероятность появления события.

Таким образом, при достаточно большом количестве испытаний в качестве ***статистической вероятности события*** принимают ***относительную частоту*** или число, близкое к ней.

<u>Пример 7</u>. Естествоиспытатель К. Пирсон терпеливо подбрасывал монету и после каждого бросания не ленился записывать полученный результат. Проделав эту операцию 24 000 раз, он обнаружил, что герб выпадал в 12 012 случаях. Вычисляя относительную частоту выпадения герба, он получил ,

что практически равно 1/2.

$$\frac{12012}{24000} = 0{,}5005$$

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем

задание. 2. Соответствующим образом оформить работу

<u>Перечень заданий.</u>

Задача 1. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Задача 2. В коробке лежат 8 зеленых, 7 синих и 15 красных карандашей. Вычислить вероятность того, что взятый наугад карандаш будет, синим или зеленым.

Задача 3. В одной коробке находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой коробки вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Задача 4. В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Задача 5. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Задача 6. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

Задача 7. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.

Задача 8. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

Задача 9. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему три вопроса?

Задача 10. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на карточках, равна десяти?

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы

2.Цель работы

3.Задание

4.Формулы расчета

5.Результат

Практическое занятие №3

Тема:*«Решение задач по теме «Теоремы сложения и умножения вероятностей»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основы теории вероятностей».

Краткие теоретические сведения.

Закон сложения вероятностей

Суммой двух событий называется такое событие, при котором появляется хотя бы одно из двух событий (А или В).

Если А и В *совместимые* события, то их сумма А+В обозначает наступление события А или события В или обоих событий вместе.

Если А и В *несовместимые* события, то сумма А+В означает наступление или события А или события В.

Теорема: (сложение вероятностей совместимых событий). Вероятность появления хотя бы одного из двух совместимых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A \quad B) \quad P(A) \quad P(B) \quad P(AB).$$

Теорема: (сложение вероятностей несовместимых событий). Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместимых событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A \quad B) \quad P(A) \quad P(B).$$

Условная вероятность

Условная вероятность события А – это вероятность события А, найденное при условии, что событие В уже произошло $P_B(A)$.

Теоремы умножения вероятностей

Произведением двух событий А и В называется событие, состоящее в совместном появлении этих событий.

Теорема: (умножение вероятностей независимых событий). Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(AB) \quad P(A) \quad P(B).$$

Теорема: (умножение вероятностей зависимых событий). Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого.

$$P(AB) \quad P(A) \quad P_A(B) \quad P(B) \quad P_B(A).$$

Задача 1

Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.

Решение: всего получено магазином: 4 + 5 + 7 + 4 = 20 ящиков.

В данной задаче удобнее воспользоваться «быстрым» способом оформления без расписывания событий большими латинскими буквами. По классическому определению:

$p_1 = \frac{4}{20} = 0,2$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 1-го склада;

$p_3 = \frac{7}{20} = 0,35$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 3-го склада.

Бесконечных «хвостов» после запятой тут нет и не ожидается, поэтому можно работать с десятичными дробями – компактнее будет запись.

По теореме сложения несовместных событий:

$p = p_1 + p_3 = 0,2 + 0,35 = 0,55$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с первого или третьего склада.

Ответ: 0,55

Задача 2

В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

Решение: вероятность извлечения стандартной или нестандартной детали из любого ящика не зависит от того, какие детали будут извлечены из других ящиков, поэтому в задаче речь идёт о независимых событиях. Рассмотрим следующие независимые события:

S_1 – из 1-го ящика извлечена стандартная деталь;

S_2 – из 2-го ящика извлечена стандартная деталь;

S_3 – из 3-го ящика извлечена стандартная деталь.

По классическому определению:

$P(S_1) = \frac{8}{10} = 0,8;$ $P(S_2) = \frac{7}{10} = 0,7;$ $P(S_3) = \frac{9}{10} = 0,9$ – соответствующие вероятности.

Интересующее нас событие *(из 1-го ящика будет извлечена стандартная деталь **и** из 2-го стандартная **и** из 3-го стандартная)* выражается произведением $S_1S_2S_3$.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P(S_1S_2S_3) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504$ – вероятность того, что из трёх ящиков будет извлечено по одной стандартной детали.

Ответ: 0,504

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание. 2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий.

1. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка – 0,6; для второго – 0,7; для третьего – 0,8. Найдите вероятность: а) одного попадания в цель; б) все три попадут в цель.
2. В урне находятся 20 белых и 15 черных шаров. Наудачу вынимают один шар, который оказался белым, и откладывают его в сторону. После этого берут еще один шар. Найдите вероятность того, что этот шар также окажется белым.
3. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,8; а для второго – 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет: а) только один из стрелков? б) оба стрелка промахнутся?
4. В урне 8 черных, 6 красных и 4 белых шара. Последовательно вынимают три шара. Найти вероятность того, что первый шар окажется черным, второй – красным, третий – белым.
5. В коробке 10 красных и 6 синих пуговиц. Наудачу извлекаются две пуговицы. Какова вероятность того, что они будут одноцветными?
6. В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: а) все три шара будут белыми; б) все три шара будут одного цвета.

7. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует настройки, равна 0,3, второй – 0,75, третий – 0,4. Найти вероятность того, что в течение смены:
8. а) все станки потребуют настройки;
   б) только один станок потребует настройки;
   в) хотя бы один станок потребует настройки.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1. Название работы
2. Цель работы
3. Задание
4. Формулы расчета
5. Результат

Практическое занятие №4

Тема: *«Решение задач на формулу Бернулли»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основы теории вероятностей».

Краткие теоретические сведения.

Если производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* одна и та же и равна *p*, то вероятность того, что событие *A* появится в этих n испытаниях *m* раз, выражается ***формулой Бернулли***

$$P_n(m) = C_n^m \cdot pm \cdot qn\text{-}m, \text{ где } q = 1\text{-}p.$$

Число m_0 называется ***наивероятнейшим числом*** наступлений события *A* в n испытаниях и равно целой части числа $(n+1)p$, а при целом $(n+1)p$ наибольшее значение достигается при двух числах: $m_1=(n+1)p-1$ и $m_2=(n+1)p$.

Если p≠0 и p≠1, то число m_0 можно определить из двойного неравенства

$$np-q \le m_0 \le np+p.$$

Задача 1.

В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется два белых?

Решение. Вероятность извлечения белого шара p=20/30=2/3 можно считать одной и той же во всех испытаниях; q=1-p=1/3. Используя формулу Бернулли, получаем

$$P_4(2) = C4_2 \cdot p2 \cdot q2=(12/2)\cdot(2/3)2\cdot(1/3)2 = 8/27$$

Задача 2. Игральную кость бросили 10 раз. Какова вероятность, что число 3 выпадет два раза?

Решение. При одном броске вероятность выпадения тройки равна p = 1/6, а вероятность не выпадения равна 1-p = 5/6.

Каждый бросок - независимое испытание. Применим ф-лу Бернулли.

$P_n(m)=C_n^m\ pm(1-p)n\text{-}m,$ n=10, m=2

$P= C_{10}^2 \cdot(1/6)^2 \cdot(5/6)^8 = 10!/ (8!*2!)* 5^8/6^{10} = 45*5^8/6^{10} \approx 0,29$

Задача 3.

Вероятность появления события A равна 0,4. Какова вероятность того, что при 10 испытаниях событие A появится не более трех раз?

Решение. Здесь p=0,4, q=0,6. Имеем:

$$P_{10}(0) = q10,\ P_{10}(1) = 10pq9,\ P_{10}(2) = 45p2q8,\ P_{10}(3) = 120p3q7.$$

Вероятность того, что событие A появится не больше трех раз, равна

$$P = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3) = q10+10pq9+45p2q8+120p3q7 \approx 0,38 .$$

Задача 4.
Вероятность попадания стрелком в цель равна 0,7. Сделано 25 выстрелов. Определить наивероятнейшее число попаданий в цель.
Решение. Здесь n=25, p=0,7, q=0,3. Следовательно,

$$25\cdot0,7-0,3 \le m_0 \le 25\cdot0,7 + 0,7, \text{ т.е. } 17,2 \le m_0 \le 18,2.$$

Так как m - целое число, то m_0=18.

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем

задание. 2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий.

Задача 1. Монету бросают 10 раз. Найдите вероятность, что герб выпадет:
1) 4 раза;
2) не менее 4 раз.
Задача 2. Игральная кость бросается 6 раз. Какова вероятность того, что шестерка выпадет 4 раза?
Задача 3. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0.11. Пользуясь формулой Бернулли найти вероятность того, что из пяти наудачу взятых деталей будут четыре стандартных.

Задача 4. Произведено 46 бросков одной игральной кости, каково наивероятнейшее количество выпадений шестерки?

Задача 5. *Игральная кость бросается 21раз. Каково наиболее вероятное количество испытаний, в которых выпадет менее 4-х очков?*
Задача 6. *Игральная кость бросается 16 раз. Найти наивероятнейшее число появления числа очков кратного трем.*
Задача 7. Вероятность изготовления изделия высшего сорта равна 0,87. Чему равно наиболее вероятное число изделий высшего сорта в партии из 100 изделий.

Задача 8. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется 2 белых.

Задача 9. Среди деталей, обрабатываемых рабочим, бывает в среднем 4% нестандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание 30 деталей две будут нестандартными.

Задача 10. При каждом отдельном выстреле из орудия вероятность поражения цели равна 0,9. Найти вероятность того, что из 20 выстрелов число удачных будет не менее 16 и не более 19.

Содержание отчета
Отчет должен содержать:
1.Название работы
2.Цель работы
3.Задание
4.Формулы расчета
5.Результат

Практическое занятие №5
Тема: *«Применение формул Лапласа»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основы теории вероятностей».
Краткие теоретические сведения.

Локальная теорема Лапласа

Если вероятность p появления случайного события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно m раз, приближённо равна:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$, где $$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$.

<u>Задача 1</u>

Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет ровно:

а) 200 раз;

б) 225 раз.

$n = 400$ – общее количество независимых испытаний;

$p = 0,5$ – вероятность выпадения орла в каждом броске;

$q = 1 - p = 0,5$ – вероятность выпадения решки.

а) Найдём вероятность того, что в серии из 400 бросков орёл выпадет ровно $m = 200$ раз. Ввиду большого количества испытаний используем локальную теорему Лапласа: $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

На первом шаге вычислим требуемое значение аргумента:

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{200 - 400 \cdot 0,5}{\sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{200-200}{\sqrt{100}} = \frac{0}{10} = 0$$

Далее находим соответствующее значение функции: $\varphi(0)$. Это можно сделать несколькими способами. В первую очередь, конечно же, напрашиваются непосредственные вычисления:

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,3989$$

На заключительном этапе применим формулу $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$:

$$P_{400}(200) \approx \frac{1}{10} \cdot \varphi(0) \approx 0,1 \cdot 0,3989 = 0,03989$$ – вероятность того, что при 400 бросках монеты орёл выпадет ровно 200 раз.

б) Найдём вероятность того, что в серии из 400 испытаний орёл выпадет ровно $m = 225$ раз. Используем локальную теорему Лапласа. Раз, два, три – и готово:

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{225-200}{10} = \frac{25}{10} = 2,5$$

$$\varphi(2,5) \approx 0,0175$$

$$P_{400}(225) \approx \frac{1}{10} \cdot \varphi(2,5) \approx 0,1 \cdot 0,0175 = 0,00175$$ – искомая вероятность.

Ответ: а) $\approx 0,04$; б) $\approx 0,002$

Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность p появления случайного события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ того, что в n испытаниях событие A наступит **не менее** m_1 **и не более** m_2 **раз** *(от m_1 до m_2 раз включительно)*, приближённо равна:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$, где $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$$

<u>Задача 2</u>

Вероятность поражения стрелком мишени равна 0,7. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 65 до 80 раз.

Решение: В данной задаче речь идёт о повторных независимых испытаниях, причём их количество достаточно велико. По условию требуется найти вероятность того, что мишень будет поражена не менее 65, но и не более 80 раз, а значит, нужно использовать интегральную теорему Лапласа: $P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$

Для удобства перепишем исходные данные в столбик:

$n = 100$ – всего выстрелов;

$m_1 = 65$ – минимальное число попаданий;

$m_2 = 80$ – максимальное число попаданий;

$p = 0{,}7$ – вероятность попадания в мишень при каждом выстреле;

$q = 1 - p = 0{,}3$ – вероятность промаха при каждом выстреле.

$npq = 100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 21 > 10$, следовательно, теорема Лапласа даст хорошее приближение.

Вычислим значения аргументов:

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 100 \cdot 0{,}7}{\sqrt{21}} = \frac{80 - 70}{\sqrt{21}} \approx \frac{10}{4{,}5825} \approx 2{,}18$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{65 - 70}{\sqrt{21}} \approx \frac{-5}{4{,}5825} \approx -1{,}09$$

Значения функции $\Phi(x)$ *найдём по соответствующей таблице*:

$$P_{100}(65 \le m \le 80) \approx \Phi(2{,}18) - \Phi(-1{,}09) = \Phi(2{,}18) + \Phi(1{,}09) = 0{,}4854 + 0{,}3621 = 0{,}8475$$

– вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 65 до 80 раз.

Функция нечетна, поэтому

$$\Phi(2{,}18) - \Phi(-1{,}09) = \Phi(2{,}18) - (-\Phi(1{,}09)) = \Phi(2{,}18) + \Phi(1{,}09)$$

Ответ: $P_{100}(65 \le m \le 80) \approx 0{,}8475$

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.

2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий.

1. Вероятность рождения мальчика равна 0,52. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется ровно: а) 40 мальчиков, б) 50 мальчиков, в) 30 девочек.

2. В здании имеется 2500 ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что вечером будет включено не менее 1250 и не более 1275 ламп.

3. В колледже обучается примерно 1000 студентов. В столовой имеется 105 посадочных мест. Каждый студент отправляется в столовую на большой перемене с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что в обычный учебный день:

а) столовая будет заполнена не более чем на две трети;
б) посадочных мест на всех не хватит.

4. В обычный учебный день вероятность присутствия студента на лекции равна 0,8. Найти вероятность того, что из 24 студентов на лекции будут присутствовать:

а) 85-90%;
б) половина студентов;
в) не менее 18 студентов.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы
2.Цель работы
3.Задание
4.Формулы расчета
5.Результат

Практическое занятие №6

Тема:*«Построение закона распределения и функции распределения ДСВ»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Дискретная случайная величина (ДСВ)».

Краткие теоретические сведения:

Случайная величина называется дискретной, если ее частные (возможные) значения можно пронумеровать.

Дискретная случайная величина *X* может быть задана рядом распределения или функцией распределения (интегральным законом распределения).

Рядом распределения называется совокупность всех возможных значений x_i, и соответствующих им вероятностей $p_i = P(X=x_i)$.Ряд распределения может быть задан в виде таблицы (табл. 1) или формулой.

Таблица 1.

x_i	x1	x_2	.....	x_n
p_i	p_1	p_2	.....	p_n

Вероятности p_i удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n} pi = 1,$$

где число возможных значений *n* может быть конечным или бесконечным.

Графическое изображение ряда распределения называется многоугольником распределения. Для его построения возможные значения случайной величины (x_i) откладываются по оси абсцисс, а вероятности p_i - по оси ординат; точки A_iс координатами (x_i;p_i) соединяются ломаными линиями (рис. 1).

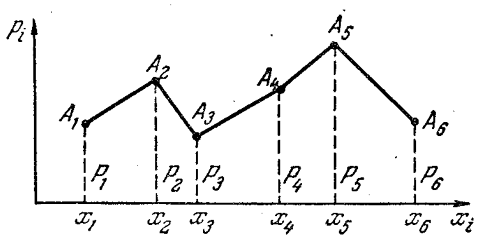


Рис. 1

Функцией распределения (интегральным законом распределения) случайной величины *X* называется функция *F (x)*, равная вероятности $P(X<x)$ того, что случайная величина будет меньше произвольно выбранного значения *x*. Функция$F(x)$ вычисляется по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i,$$

где суммирование ведется по всем значениям *i*, для которых $x_i<x$.

б) Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины

Случайная величина называется непрерывной, если существует неотрицательная функция $f(x)$, удовлетворяющая при любых *x* равенству

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Функция $f(x)$ называется плотностью вероятности

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Непрерывная случайная величина задается либо функцией распределения $F(x)$ (интегральным законом распределения), либо плотностью вероятности $f(x)$ (дифференциальным законом распределения).

Функция распределения $F(x)$ = P(X<x), где x— произвольное действительное число, дает вероятность того, что случайная величина X окажется меньше x.

Функция распределения $F(x)$ имеет следующие основные свойства:

1) $P(a \le X < b) = F(b) - F(b)$;

2) $F(x_1) \le F(x_2)$, *если* $x_1 < x_2$;

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Плотность вероятности (дифференциальный закон распределения) $f(x)$ обладает следующими основными свойствами:

1) $f(x) \ge 0$;

2) $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

4) $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$.

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание. 2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий.

1. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,4	0,2

2. В партии из шести деталей имеется четыре стандартные. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

3. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,3. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

4. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	3	4	5	6	7
P	p_1	0,15	p_3	0,25	0,35

Найти вероятности p_1 и p_3, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1.

5. Монету подбрасывают пять раз. Составить закон распределения случайной величины X – числа выпадения герба.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1. Название работы
2. Цель работы
3. Задание
4. Формулы расчета
5. Результат

Практическое занятие №7

Тема: ***«Вычисление основных числовых характеристик ДСВ»***

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Дискретная случайная величина (ДСВ)».

Математическое ожидание ДСВ определяется формулой

$$\bar{x} = M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i ,$$

дисперсия, — формулой

$$D[X] = M[(X - \bar{x})^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 p_i$$

или формулой

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 .$$

Среднее квадратичное отклонение определяется соотношением

$$\sqrt{D[X]} .$$

Краткие теоретические сведения:

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание. 2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий.

1. Производится три выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1=0,7$; $p_2=0,8$ и $p_3=0,6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

2. Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

3. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем x_1меньше x_2. Найти x_1 и x_2, зная, что M(X)=2,7 и D(X)=0,21.

4. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: $x_1=6$ с вероятностью $p_1=0{,}5$, $x_2=4$ с вероятностью $p_2=0{,}3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что M(X)=12.

5. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины, заданной законом распределения.

У	2	4	5	6
Р	0,1	0,3	0,2	0,4

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы
2.Цель работы
3.Задание
4.Формулы расчета
5.Результат

Практическое занятие №8

Тема: *«Построение закона распределения и функции распределения НСВ»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Непрерывная случайная величина (НСВ)».

Краткие теоретические сведения.

Определение . Распределение случайной величины *X* называется непрерывным, если существует такая, интегрируемая функция $f(x) \geq 0$, что выполняется условие

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

Функция *f*(*x*) называется плотностью вероятности(плотностью распределения вероятности) или дифференциальным законом распределения.

Свойства плотности распределения.

1) $f(x) \geq 0;\ x \in R_1$ - не отрицательная функция.

2)Если *F*(*x*) – дифференцируемая функция, то $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$;

3)Вероятность того, что случайная величина будет находится в пределах $x_1 \leq X \leq x_2$ определяется соотношением

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Плотность распределения, так же как и функция распределения есть одна из форм закона распределения. Однако она не является универсальной характеристикой случайной величины, так как существует только для непрерывных случайных величин.

Рассмотрим непрерывную случайную величину *X* с плотностью распределения *f*(*x*).

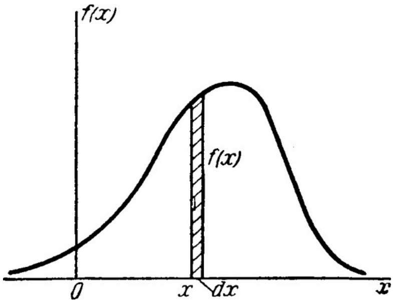


Рис.3.3.3

Выделим элементарный участок dx. Вероятность попадания величины X на этот участок $f(x)dx$ называют элементом вероятности.

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий.

1. Случайная величина X задана интегральнойфункцией:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le -2\\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2} & при -2<x\le 2\\ 1 & при\ x>2\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина *X*примет значение:
а) меньше 0; б) меньше 1; в) не меньше 1; г) заключенное в интервале (0;2).

2. Случайная величина задана интегральнойфункцией:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 1\\ \frac{x^2}{8}-\frac{1}{8} & при\ 1<x\le 3\\ 1 & при\ x>3\end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины *X;* б)математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное: отклонение случайной величины *X;* в) вероятность попадания случайной величины в интервал(1;2).

3. Случайная величина X задана интегральнойфункцией:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le A\\ \frac{x^3}{4} & при\ A<x\le B\\ 1 & при\ x>B\end{cases}$$

Найти значения *A и B*, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины *X*.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:
1.Название работы
2.Цель работы
3.Задание
4.Формулы расчета
5.Результат

Практическое занятие №9

Тема: *«Вычисление основных числовых характеристик НСВ»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Непрерывная случайная величина (НСВ)».

Краткие теоретические сведения.

Непрерывной называют **случайную величину**, которая может принимать все значения из некоторого промежутка.

Законом распределения (или интегральной функцией распределения) **непрерывной случайной величины** X называется функция F(x), равная вероятности того, что X приняла значение меньше X:

$$F(x) = P(X < x).$$

Плотностью распределения (или дифференциальной функцией распределения) **непрерывной случайной величины** X называется функция f(x), равная производной интегральной функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

В частности, вероятность попадания случайной величины в интервал (a ; b) равна:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Математическое ожидание M(X) и **дисперсия D(X)** непрерывной случайной величины определяются через несобственные интегралы:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(x)]^2 f(x)dx.$$

Все свойства дисперсии и математического ожидания, установленные для ДСВ, сохраняются для НСВ.

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу.

Перечень заданий.

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения f(x)= $\frac{1}{2}x$ на интервале (0;2).

2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)=

$$\begin{cases} 0 \text{ при } x \quad 0, \\ \cos x \text{ при } 0 \quad x \quad \frac{}{2}, \\ 0 \text{ при } x \quad \frac{}{2}. \end{cases}$$

3. Случайная величина X в интервале (0;1) задана плотностью распределения f(x)= $3x^2$; вне этого интервала f(x) = 0. Найти моду величины X.

4. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)=

$$\begin{cases} 0 \text{ при } x \quad 0, \\ x \text{ при } 0 \quad x \quad 1, \\ 1 \text{ при } x \quad 1. \end{cases}$$

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы

2.Цель работы

3.Задание

4.Формулы расчета

5.Результат

Практическое занятие №10

Тема: *«Законы распределения НСВ»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Математическая статистика».

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу.

Перечень заданий.

1. Случайная величина X задана на всей оси x функцией распределения $F(x)=\frac{1}{2}\quad arctg\frac{x}{2}$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале (0;1).

2. Найти функцию распределения по данной плотности распределения и построить ее график: $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \quad 0, \\ \sin x \text{ при } 0 \quad x \quad \frac{}{2}, \\ 0 \text{ при } x \quad \frac{}{2}. \end{cases}$

3. Найти плотность распределения случайной величины X , заданной функцией распределения $F(x)= \begin{cases} 0 \text{ при } x \quad 0, \\ 5x \text{ при } 0 \quad x \quad 1, \\ x \text{ при } x \quad 1. \end{cases}$

4. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{2}\sin 6x - \frac{}{9}$ в интервале (0; $\frac{}{3}$); вне этого интервала f(x) =0. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу($\frac{}{6}$; $\frac{}{4}$).

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы

2.Цель работы

3.Задание

4.Формулы расчета

5.Результат

Практическое занятие №11

Тема: *«Построение статистического дискретного ряда распределения»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Математическая статистика».

Краткие теоретические сведения.

Генеральной совокупностью называется совокупность всех однородных объектов, из которых производится выборка.

Выборочной совокупностью (или выборкой) называется совокупность случайно отобранных однородных объектов.

Объёмомсовокупности(генеральнойиливыборочной)называетсячислообъектов этой совокупности.

Статистическим распределением выборки называют перечень наблюдавшихся значений $x_к$ признака X и соответствующих им частот n_k(или относительных частот n_k/n), записанных в возрастающем порядке.

Полигоном относительных частот дискретно распределённого признака X называют ломанную, отрезки которой соединяют точки $(x_1 ; n_1/n)$, $(x_2 ;n_2/n)$,…$(x_k;n_k/n)$.

Гистограммой относительных частот непрерывно распределённого признака X называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которыхслужатчастичныеинтервалыhохватывающиевсенаблюдаемыезначения признака X, а высоты равны отношению $n_k/ (nh)$. Площадь такой гистограммы равнаединицы.

Выборочная средняя (служит оценкой математического ожидания генеральной совокупности) вычисляется по формуле

$$\bar{x}_B = \frac{n_1x_1 + n_1x_2 + ... + n_kx_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i.$$

Выборочная дисперсия (служит оценкой генеральной дисперсии) определяется по формуле

$$D_B = \frac{n_1(x_1 - \bar{x}_B)^2 + n_2(x_2 - \bar{x}_B)^2 + ... + n_k(x_k - \bar{x}_B)^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x}_B)^2.$$

Для расчётов удобнее использовать следующую формулу:

$$D_B = \frac{\sum n_ix^2{}_i}{n} - \left[\frac{\sum n_ix_i}{n}\right]^2.$$

Несмещённой называют **точечную оценку** (число, полученное по выборке признака X),математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объёме выборки.

Несмещённой точечной оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя.

Смещённой точечной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия.

Несмещённой оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия.

Интервальной называют **оценку** в виде интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B.$$

Решение типовой задачи

Данные к задаче.

Изучая демографическую ситуацию в городе, группа исследователей на основе репрезентативной (представительной) выборки объёмом n = 100 составила таблицу, содержащую следующие данные: количество несовершеннолетних детей (признак X) и доход на одного члена семьи (признак Y, тыс. руб.).

По выборке дискретно распределённого признака X требуется: а) изобразить полигон выборки; б) определить выборочное среднее и выборочную дисперсию случайной величины X.

По выборке дискретно распределённого признака Y требуется: а) изобразить гистограмму выборки; б) определить выборочное среднее и выборочное среднее квадратичное отклонение случайной величины Y.

Решение.

а) По оси ординат откладываем варианты выборки признака X – количество несовершеннолетних детей – 0 ; 1 ; 2 ; 3.

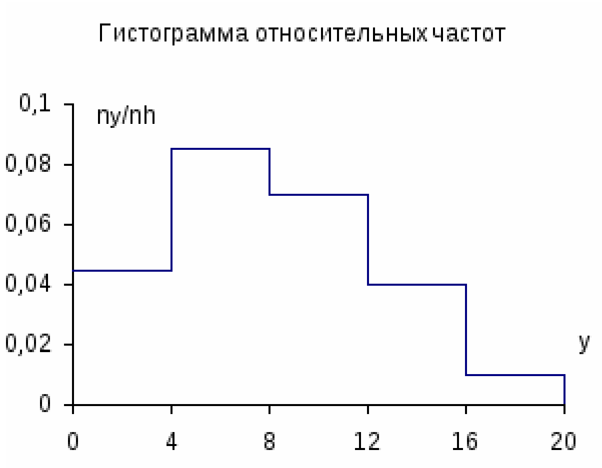
Поосиабсциссоткладываемсоответствующиеимотносительныечастоты–16/100; 41/100; 32/100;11/100.

б) Определяем выборочное среднее:

$$\overline{x}_B = \frac{0\cdot 16 + 1\cdot 41 + 2\cdot 32 + 3\cdot 11}{100} \approx 1{,}38.$$

Определяем выборочную дисперсию:

$$D_{BX} = \frac{0^2\cdot 16 + 1^2\cdot 41 + 2^2\cdot 32 + 3^2\cdot 11}{100} - 1{,}38^2 \approx 0{,}776.$$



а) По оси ординат откладываем интервалы выборки признака Y. $\dfrac{n_y}{nh}$

По оси абсцисс откладываем соответствующие им отношения , где h – величиназаданныхинтервалов(взаданииh=4тыс.руб.).Длярасчётовпараметров выборки принимаем серединыинтервалов.

б) Определяем выборочное среднее:

$$\overline{y}_B = \frac{2\cdot 18 + 6\cdot 34 + 10\cdot 28 + 14\cdot 16 + 18\cdot 4}{100} \approx 8{,}16.$$

Определяем выборочную дисперсию:

$$D_{BY} = \frac{2^2\cdot 18 + 6^2\cdot 34 + 10^2\cdot 28 + 14^2\cdot 16 + 18^2\cdot 4}{}100 - 8{,}16^2 \approx 18{,}69.$$

Определяем выборочное среднее квадратичное отклонение: $\sigma_y = \sqrt{D_{BY}} \approx 4{,}32.$

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_y \approx 4{,}34.$$

<u>Порядок проведения работы:</u>

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу.

<u>Перечень заданий.</u>

№ 1. Для выборки 7,-7,2,7,7,5,5,7,5,-7 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

<u>Содержание отчета</u>

Отчет должен содержать:

1. Название работы
2. Цель работы
3. Задание
4. Формулы расчета
5. Результат

Практическое занятие №12

Тема: *«Построение эмпирической функции распределения»*

<u>Цель работы:</u> Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Математическая статистика».

<u>Порядок проведения работы:</u>

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу.

<u>Перечень заданий.</u>

1. Случайная величина X задана на всей оси x функцией распределения F(x)= $\frac{1}{2}$ arcsin $\frac{x}{2}$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале (-1;1).

2. Найти функцию распределения по данной плотности распределения и построить ее график: f(x)

$$= \begin{cases} 0 \ \text{при} \ x \quad 0, \\ 2\cos 2x \ \text{при} \ 0 \quad x \quad \frac{}{2}, \\ 0 \ \text{при} \ x \quad \frac{}{2}. \end{cases}$$

3. Найти плотность распределения случайной величины X , заданной функцией распределения

$$F(x)= \begin{cases} 0 \ \text{при} \ x \quad 0, \\ \sin 2x \ \text{при} \ 0 \quad x \quad \frac{}{4}, \\ \quad — \end{cases}$$

1 при $x \;\; 4$.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы
2.Цель работы
3.Задание
4.Формулы расчета
5.Результат

Практическое занятие №13

Тема: *«Вычисление выборочных характеристик распределения»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Математическая статистика"

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу.

Перечень заданий.

1. Дискретная случайная величина распределения по закону. Найти Д (Х).

x	1	3	5	7
p	0,3	0,3	0,1	0,3

2. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки n=10.

x_i	52	54	58
n_i	4	6	5

Перейти к условным вариантам $u_i=x_i-54$.

3. Разыграть пять возможных значений дискретной случайной величины Х, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	10	2	18
p	0,22	0,17	0,61

4. Дискретная случайная величина Х принимает 3 возможных значения: $x_1=6$ с вероятностью $p_1=0{,}5$, $x_2=4$ с вероятностью $p_2=0{,}3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что M(X)=12.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы
2.Цель работы
3.Задание
4.Формулы расчета
5.Результат

Практическое занятие №14

Тема: *«Вычисление коэффициента корреляции»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить задачи по теме «Математическая статистика».

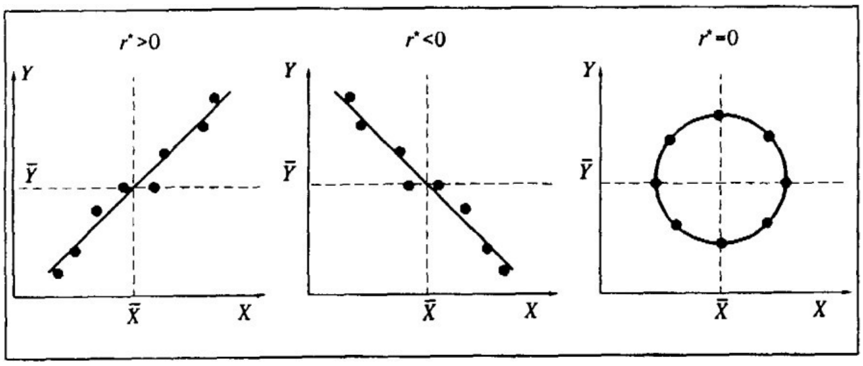
Краткие теоретические сведения.

В качестве меры для степени линейной связи двух переменных используется коэффициент их корреляции.

$$r(x,y) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(y_m - \bar{y})^2}}$$

По формуле коэффициента корреляции видно, что он будет положителен, если отклонения переменных X и Y от своих средних значении имеют, как правило, одинаковый знак, и отрицательным - если разные знаки.

Типы зависимостей и коэффициент корреляции



Коэффициент корреляции является безразмерной величиной (так как размерности числителя и знаменателя есть размерности произведения *X Y*); его величина не зависит от выбора единиц измерения обеих переменных. Величина коэффициента корреляции меняется от -1 в случае строгой линейной отрицательной связи до +1 в случае строгой линейной положительной связи.

Для оценки значимости коэффициента корреляции можно воспользоваться следующей грубой оценкой:

$|r_{xy}| < 0{,}3$ – линейная связь отсутствует;

$0{,}3 \le |r_{xy}| < 0{,}7$ – имеется слабая линейная связь;

$|r_{xy}| \ge 0{,}7$ – имеется сильная линейная связь;

Случаи положительной и отрицательной корреляции переменных (с близкими по модулю к единице коэффициентами корреляции) показаны на рисунке. Близкая к нулю величина коэффициента корреляции говорит об отсутствии линейной связи переменных, но не об отсутствии связи между ними вообще. Это ясно из правой части рисунка, где *X* и Y, очевидно, связаны друг с другом (лежат на одной окружности), но их коэффициент корреляции близок к нулю. Последнее вытекает их того, что каждой паре одинаковых отклонений переменной X от ее среднего значения соответствуют равные по абсолютной величине положительное и отрицательное отклонения переменной X от ее среднего.

Соответственно, произведения этих отклонений "гасят" друг друга в числителе формулы коэффициента корреляции, и он оказывается близким к нулю. Заметим, что в числителе формулы для выборочного коэффициента корреляции величин *X* и*Y*стоит их *показатель ковариации:*

$$\operatorname{cov}(X,Y)\ \frac{1}{n}\ {}_{k\ 1}^{\ n}(x_k - \bar{x})(y_k\ \bar{y}).$$

Этот показатель, как и коэффициент корреляции, характеризует степень линейной связи величин *X* и Y, и он также равен нулю, если эти величины независимы. Однако, в отличие от коэффициента корреляции, показатель ковариации не нормирован - он имеет размерность, и его величина зависит от единиц измерения величин *X* и*Y*. В статистическом анализе показатель ковариации сам по себе используется редко; он фигурирует обычно как промежуточный элемент расчета коэффициента корреляции.

Мы вели до сих пор речь о выборочном коэффициенте корреляции величин *X* и Y, который рассчитывается для оценки степени линейной связи этих величин по данным выборки. При этом истинным показателем степени линейной связи величин *X* и Y для закона распределения, имеющегося на генеральной совокупности, является теоретический коэффициент корреляции $_{XY}$, оценкой которого является выборочный коэффициент корреляции. Коэффициент корреляции для генеральной совокупности определяется следующим образом:

$$_{XY}\quad \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{(X)\ (Y)}$$

Стоящий в числителе этой формулы показатель ковариации величин X и Yопределяется следующим образом:

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=M[(X-M[X]]\ (Y-M[Y]]$$

Задача 1

Провести корреляционный анализ зависимости выручки от числа торговых точек.

Исходные данные для корреляционного анализа

№	Число торговых точек (X)	Выручка (Y)	XY	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	
1.	2	1598	3196	7,84	2291792,3	
2.	5	2644	13220	0,04	218899,2	
3.	4	2197	8788	0,64	836981,0	
4.	5	1959	9795	0,04	1329101,6	
5.	3	1052	3156	3,24	4243050,7	
6.	3	1922	5766	3,24	1415782,7	
7.	5	2385	11925	0,04	528335,2	
8.	5	2581	12905	0,04	281819,4	
9.	5	3105	15525	0,04	47,2	
10	4	3896	15584	0,64	614865,1	
11	4	1510	6040	0,64	2565976,8	
12	2	1880	3760	7,84	1517495,5	
13	5	3620	18100	0,04	258199,5	
14	6	5002	30012	1,44	3572604,0	
15	5	2819	14095	0,04	85770,9	
16	4	4076	16304	0,64	929553,1	
17	6	1869	11214	1,44	1544717,6	
18	3	3524	10572	3,24	169853,9	
19	6	3925	23550	1,44	661185,8	
20	4	1998	7992	0,64	1240699,0	
21	3	2606	7818	3,24	255901,1	
22	5	2353	11765	0,04	575878,6	

№	Число торговых точек (X)	Выручка (Y)	XY	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
23	3	2981	8943	3,24	17126,1
24	7	4471	31297	4,84	1847243,4
25	6	2308	13848	1,44	646201,6
26	5	4563	22815	0,04	2105788,0
27	7	4306	30142	4,84	1425954,4
28	5	2541	12705	0,04	325888,8
29	8	6184	49472	10,24	9438003,2
30	9	7481	67329	17,64	19089326,1
Итого:	**144**	**93356**	**497633**	**78,8**	**60034041,5**

Решение.

Линейный коэффициент корреляции характеризует тесноту и направление связи между двумя коррелируемыми признаками в случае наличия между ними линейной зависимости:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Среднее число торговых точек равно:

$$\bar{x} = \frac{144}{30} = 4.8$$

Средняя выручка:

$$\bar{y} = \frac{93356}{30} = 3111.9$$

Средний показатель *XY*:

$$\overline{xy} = \frac{497633}{30} = 16587.8$$

Дисперсия количества торговых точек:

$$\sigma_x^2 = \frac{78.8}{30} = 2.63\ ,$$

,

а среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{2.63} = 1.62$$

Дисперсия выручки:

$$\sigma_y^2 = \frac{60034041.5}{30} = 2001134.7\ ,$$

,

среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_y = \sqrt{2001134.7} = 1414.6$$

Коэффициент корреляции равен:

$$t_p = \sqrt{\frac{r^2}{1 - r^2}(n-2)} = \sqrt{\frac{0.72^2}{1 - 0.72^2}(30-2)} = 5.49$$

Задача 2

В таблице приведен ряд, устанавливающий связь между уровнем IQ и уровнем средней успеваемости студентов 1-го курса.

Наблюдаемые данные уровня IQ и среднего уровня успеваемости по математике у студентов 1-го курса

X - уровень IQ	75	85	90	100	105	110	110	115	115	120	125	130	140
Y - средняя успеваемость	3,1	3,1	3,5	3,7	3,8	4,0	4,2	4,3	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0

Существует ли взаимосвязь между уровнем IQ (признак X) и средним уровнем успеваемости по математике (признак Y)?

Решение

Представим исходные данные в расчетную таблицу.

№ п/п	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	75	3,1	5625	9,61	232,5
2	85	3,1	7225	9,61	263,5
3	90	3,5	8100	12,25	315,0
4	100	3,7	10000	13,69	370
5	105	3,8	11025	14,44	399
6	110	4,0	12100	16,00	440
7	110	4,2	12100	17,64	462
8	115	4,3	13225	18,49	494,5
9	115	4,6	13225	21,16	529
10	120	4,7	14400	22,09	564
11	125	4,8	15625	23,04	600
12	130	4,9	16900	24,01	637
13	140	5,0	19600	25,00	700
Суммы	**1420**	**53,7**	**159150**	**227,03**	**6006,5**

Вычислим выборочные средние:

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1420}{13} = 109,23$; $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{53,7}{13} = 4,13$; $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) = \frac{6006,5}{13} = 462,04$.

Теперь вычислим значения выборочных средних квадратических отклонений:

$$S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{13} \cdot 159150 - 109{,}23^2} = 17{,}64;$$

$$S_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{13} \cdot 227{,}03 - 4{,}13^2} = 0{,}63.$$

Подставим в формулу:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{462{,}04 - 109{,}23 \cdot 4{,}13}{17{,}64 \cdot 0{,}63} = \frac{10{,}9201}{11{,}1132} \approx 0{,}98$$

Корреляционная связь между уровнем IQ и средним уровнем успеваемости по математике близка к линейной положительной. Чем выше уровень IQ у студентов, тем выше средний уровень успеваемости по математике, и наоборот.

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу.

Перечень заданий.

1. Доходность двух активов за 8 периодов представлена в таблице:

Периоды	1	2	3	4	5	6	7	8
Доходность актива Х	10	14	10	8	-5	-3	3	7
Доходность актива У	14	18	13	10	-2	-7	-2	10

Определить коэффициент корреляции доходностей активов Х и У.

2. Имеются данные о рейтинге авиакомпании и оценке ее безопасности. Вычислите линейный коэффициент корреляции.

№ п/п	Рейтинг авиакомпании, y	Оценка безопасности, x
1	3,9	0,7
2	3,9	0,68
3	3,8	0,59
4	3,7	0,25
5	3,6	0,63
6	3,3	0,5
7	3,3	0,46
8	3,3	0,24
9	3,2	0,23
10	3,2	0,6
11	3,2	0,46
12	3,2	0,5
13	3,2	0,51

№ п/п	Рейтинг авиакомпании, у	Оценка безопасности, х
14	3,1	0,3
15	3,1	0,55
16	3,1	0,6
17	3,1	0,76
18	3,1	0,46
19	3,1	0,3
20	3	0,35
21	3	0,4
22	3	0,35
23	3	0,3
24	2,9	0,3
25	2,9	0,57
26	2,8	0,33
27	2,7	0,3
28	2,6	0,3
29	2,3	0,4
30	2,1	0,25

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1. Название работы
2. Цель работы
3. Задание
4. Формулы расчета
5. Результат

Практическое занятие №15

Тема: *«Обработка статистической информации в MSExcel»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Математическая статистика».

Краткие теоретические сведения:

Задача. Застройщик оценивает стоимость группы небольших офисных зданий в традиционном деловом районе. Застройщик может использовать корреляционный анализ для установления связи между выбранными переменными.

Переменная	Смысл переменной
y	Оценочная цена здания под офис, тыс. $;
x_1	Общая площадь в квадратных метрах;
x_2	Количество офисов;
x_3	Количество входов;
x_4	Время эксплуатации здания в годах.

В этом примере предполагается, что существует линейная зависимость между каждой независимой переменной (x_1, x_2, x_3 и x_4) и зависимой переменной (*y*), то есть ценой здания под офис в данном районе.

Застройщик наугад выбирает 11 зданий из имеющихся 1500 и получает следующие данные.

Таблица

x_1	x_2	x_3	x_4	y
2310	2	2	20	142
2333	2	2	12	144
2356	3	1,5	33	151
2379	3	2	43	150
2402	2	3	53	139
2425	4	2	23	169
2448	2	1,5	99	126
2471	2	2	34	142
2494	3	3	23	163
2517	4	4	55	169
2540	2	3	22	149

"Пол-входа" (1/2) *означает вход только для доставки корреспонденции.*

Необходимо установить степень тесноты связи между объясняющими переменными и объясняемыми.

Выполнение

Для вычисления коэффициента корреляции между двумя наборами данных на листе используется статистическая функция **КОРРЕЛ()** или метод **Корреляция** из Пакета анализа.

Заполним данными диапазон A1:E12.

1. Для нахождения парной регрессии (например, между площадью и ценой) используем функцию КОРРЕЛ(), указав в окне диалога диапазоны A2:A12 и E2:E12. Полученное значение 0,32 свидетельствует о наличии слабой линейной связи между выбранными переменными.

2. Чтобы найти коэффициенты корреляции между всеми парами переменных воспользуемся средством **Корреляция** из Анализа данных. В окне диалога необходимо указать входной интервал, наличие меток (подписей к данным) в первой строке, название листа, на котором будут отображены результаты анализа.

	x1	*x2*	*x3*	*x4*	*y*
x1	1				
x2	0,22	1			
x3	0,62	0,31	1		

x4	0,22	-0,05	-0,05	1	
y	0,32	0,88	0,51	-0,45	1

Окно диалога «Корреляция».

После выполнения анализа из отчета можно увидеть, что в наибольшей степени цена дома определяетсяколичеством офисов в нем (коэффициент корреляции 0,88). Отрицательно на цене сказывается возраст дома, – чем он больше, тем дом дешевле (коэффициент корреляции -0,45). Можно также сделать вывод о существующей линейной зависимости площади дома и количества входов в него – коэффициент корреляции 0,62.

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу.

Перечень заданий.

Задание 1

Требуется выполнить расчеты корреляционной зависимости успеваемости учащихся от хозяйственных расходов школы, описанные в § 38 учебника.

1. Заполнить электронную таблицу следующими данными:

A	B	C
№ п/п	Затраты (руб./чел.)	Успеваемость (средний балл)
1	50	3,81
2	345	4, 13
3	79	4,30
4	100	3,96
5	203	3,87
6	420	4,33
7	210	4
8	137	4,21
9	463	4,4
10	231	3,99
11	134	3, 9
12	100	4,07
18	294	4, 15
14	396	4, 1
15	77	3,76
16	480	4,25
17	450	3,88
18	496	4,50
19	102	4,12
20	150	4, 32

2. Построить точечную диаграмму зависимости величин (ее вид показан в учебнике на рис. 6.7).
3. Выполнить статистическую функцию КОРРЕЛ, указав в диалоговом окне диапазоны значений: B2:B21 и C2:C21.
4. Выписать значение коэффициента корреляции.

Задание 2

Выполнить расчеты корреляционных зависимостей успеваемости учащихся от обеспеченности учебниками и от обеспеченности компьютерами, представленными в следующей таблице.

	Обеспечение учебного процесса			
Номер школы	**Обеспеченность учебниками(%)**	**Успеваемость (средний балл)**	**Обеспеченность компьютерами(%)**	**Успеваемость (средний балл)**
1	50	3,81	10	3,98
2	78	4,15	25	4,01
3	94	4,69	19	4,34
4	65	4,37	78	4,41
5	99	4,53	45	3,94
6	87	4,23	32	3,62
7	100	4,73	90	4,6
8	63	3,69	21	4,24
9	79	4,08	34	4,36
10	94	4,2	45	3,99
11	93	4,32	67	4,5

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы
2.Цель работы
3.Задание
4.Формулы расчета
5.Результат